

Ю.И. Воронова

## Математическое моделирование временных рядов в условиях кластеризации волатильности

В работе рассмотрена проблема оценки волатильности цен открытых паевых инвестиционных фондов с помощью GARCH и EGARCH-процессов. Очевидным достоинством применения EGARCH-модели перед результатами, получаемыми по GARCH, является возможность учесть знак волатильности. Этот эффект достигается путем включения функции  $g_t(\varepsilon_{t-1})$ , которая на отрицательном и положительном участке  $\varepsilon_t$  позволяет процессу для условной дисперсии асимметрично откликаться на увеличение и падение цены актива. Кроме того, исследование содержит подходы с оценкой фрактальной структуры временных рядов. Получены численные результаты прогнозов с использованием локальной аппроксимации 1-го и 2-го порядков. Приведен вывод матрицы дополнительных параметров  $B$  для локальной аппроксимации 2-го порядка.

*Ключевые слова:* волатильность, паевой фонд, GARCH, куртозис, EGARCH, аппроксимация, прогнозирование.

Выполним оценку и составим прогноз открытого паевого инвестиционного фонда «Сбербанк – Телекоммуникации и Технологии». Паевой фонд по своему экономическому смыслу – это средства инвесторов, которые переданы на доверительное управление определенной компании. Для существующего ОПИФ управляющей компанией является структурное подразделение банка «Сбербанк» – АО «Сбербанк: управление Активами». Компания управляет линейкой фондов, девятнадцать из которых являются открытыми. Структура фондов представлена различным набором активов: долговые обязательства отечественных и иностранных эмитентов, финансовый сектор, недвижимость, высокотехнологичный сектор экономики и другие. На доходность паевых инвестиционных фондов (ПИФ) влияют различные экономические факторы: мировые фондовые индексы (PTC, S&P500, DowJones, NASDAQ NIKKEI, Euro Stoxx 600, FTSE, Hang Seng и др.), государствен-

ная политика (например, ставка рефинансирования Центрального банка, государственная поддержка предприятий, государственные заказы, политические события), курсовая разница в моменты ввода и вывода капитальных средств из фондового рынка.

ОПИФ «Сбербанк – Телекоммуникации и Технологии» нацелен на долгосрочный прирост капитала путем инвестирования в акции преимущественно российских компаний связи. Динамика изменения цен пая с даты основания фонда 11.10.2006 г. по 25.02.2016 г. представлена на рис. 1.

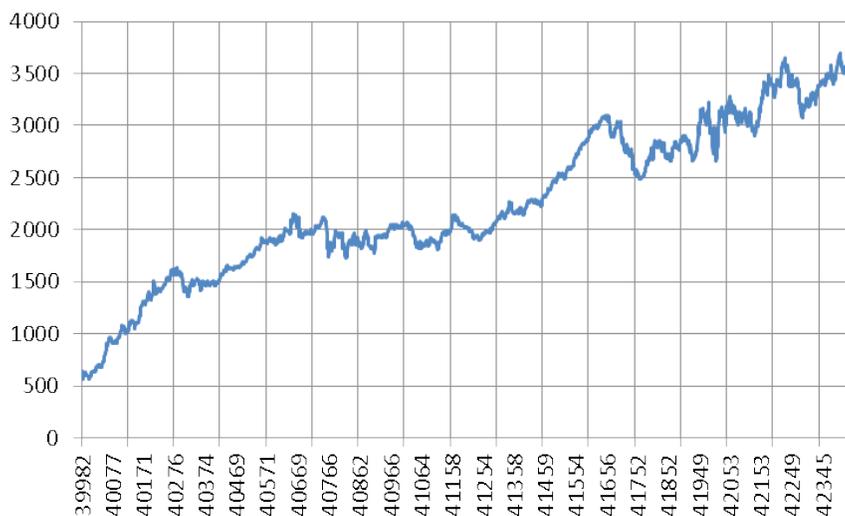


Рис. 1. Динамика цены пая ОПИФ «Сбербанк – Телекоммуникации и технологии» в период 2009–2010 гг.

Фонд создан для инвесторов, желающих увеличить вес данного сектора в своем портфеле. Фонд инвестирует в диверсифицированный в рамках одного сектора портфель, который включает акции сотовых операторов, региональных компаний фиксированной связи, альтернативных операторов, компаний медиасектора и сегмента информационных технологий, а также компании, связанные с добычей драгоценных металлов (предпочтение отдается российским компаниям)<sup>1</sup>.

Выполним преобразование исходного ряда цен паев в ряд индексов цен, используя следующую формулу:

$$Y_t = \ln \frac{p_{t+1}}{p_t}, \tag{1}$$

где  $p_t$  – цена пая в момент времени  $t$ .

На рисунке 2 отчетливо можно наблюдать высокую волатильность, что характерно для финансовых временных рядов. В этом случае для прогноза доходности мы не можем использовать традиционные модели временных рядов, такие как модель АРСС (ARMA), нелинейная, множественная регрессия, в силу того что в этих моделях предполагается постоянство дисперсии, т. е. гомоскедастичность.

Наличие гетероскедастичности в данном финансовом ряде было установлено вышеперечисленными тестами.

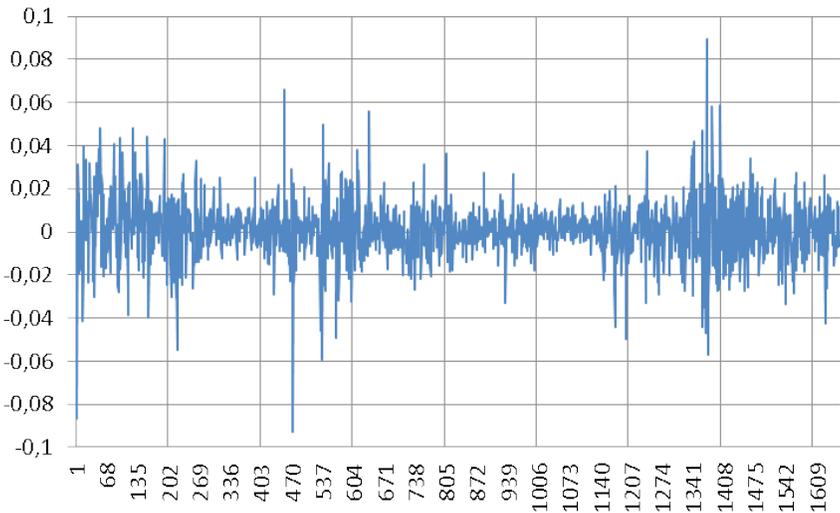


Рис. 2. График индекса цены ОПИФ  
«Сбербанк – Телекоммуникации и технологии»

В связи с этим рассмотрим модели условной гетероскедастичности: GARCH, EGARCH. Наиболее популярными моделями для анализа финансовых рядов являются данные модели 1-го порядка.

Модель  $GARCH(p, q)$  задается следующей формулой.

$$\sigma_t^2 = K + \sum_{k=1}^p \beta_k \sigma_{t-k}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2. \tag{2}$$

Для корректного определения условной дисперсии должны выполняться ограничения вида:

$$K > 0; \quad \beta_k \geq 0, k = 1 \div p; \quad \alpha_j \geq 0, j = 1 \div q \quad . \quad (3)$$

Рассчитаем безусловную дисперсию GARCH-процесса, предполагая, что он стационарен. Для этого возьмем математические ожидания от обеих частей уравнения для условной дисперсии по формуле, представленной ниже.

$$\sigma^2 = \frac{K}{1 - \sum_{k=1}^p \beta_k - \sum_{j=1}^q \alpha_j} \quad (4)$$

С точки зрения безусловной дисперсии GARCH-процесс гомоскедастичен. Для того чтобы дисперсия была конечной, требуется соблюдение следующего неравенства:

$$\sum_{k=1}^p \beta_k + \sum_{j=1}^q \alpha_j < 1. \quad (5)$$

Тогда для модели *GARCH* (1,1)

$$\sigma_t^2 = K + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \quad (6)$$

$$\sigma^2 = \frac{K}{1 - \alpha_1 - \beta_1}, \quad (7)$$

где  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ .

Прогноз условной дисперсии на момент  $t + \tau$  составит

$$\sigma_{t+\tau}^2 = K + (\beta_1 + \alpha_1) \sigma_{t+\tau-1}^2. \quad (8)$$

Оценивание параметров GARCH-модели выполним посредством максимизации функции максимального правдоподобия.

С целью оценить остроту вершины и толщину хвостов волатильности построим график куртозиса. С выводом формулы, описывающей куртозис, можно ознакомиться в<sup>2</sup>. Графики куртозиса для процесса GARCH (1.1) представлены на рис. 3.

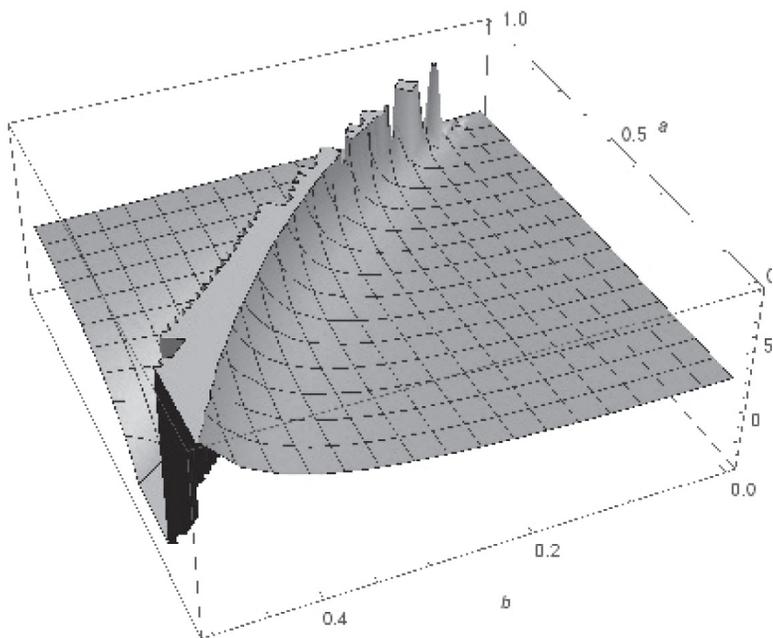


Рис. 3. График куртозиса для процесса GARCH (1.1)

После расчетов прогноз волатильности для инвестиционно-го паевого фонда на дальнейший месяц имеет следующий вид (см. рис. 4).

По графику видно, что волатильность монотонно растет и приближается к значению  $\sigma^2$ , которое может быть найдено по формуле (4). Но данная модель не предоставляет возможности определить знак волатильности. С этой проблемой хорошо справляется EGARCH, которая рассмотрена ниже.

Для повышения гибкости исходная GARCH-модель была расширена в разных направлениях. Первоначальная спецификация GARCH-модели предполагает, что реакция на шок не зависит от знака шока, а является функцией только от его размера. Но один из фактов финансовой волатильности говорит о том, что она стремится

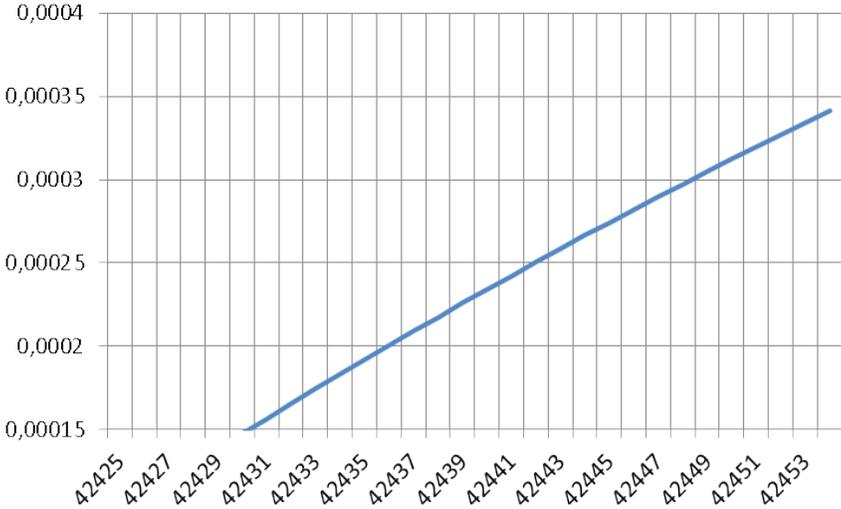


Рис. 4. Прогноз волатильности при использовании модели  $GARCH(1.1)$

ся быть выше на падающем рынке, чем на растущем. Асимметричное воздействие новостей на волатильность называют эффектом рычага<sup>3</sup>.

Асимметричные модели, одной из которых является модель EGARCH, дают объяснение этому эффекту.

В экспоненциальной GARCH-модели (EGARCH), предложенной Nelson (1991),  $\sigma_t^2$  впервые зависит как от размера, так и от знака лагированных шоков<sup>4</sup>. Модель представлена формулой (9).

$$\ln(\sigma_t^2) = K + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\phi z_{t-1} + \psi (|z_{t-1}| - E[|z_{t-1}|])) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-1}^2). \quad (9)$$

В формуле (1)  $\alpha_1 \equiv 1$ , а  $E[|z_t|] = \sqrt{2/\pi}$ , в том случае, если  $z_t$  является нормально распределенной случайной величиной с параметрами  $(0,1)$ . На величины  $K$ ,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  не накладываются ограничения неотрицательности. По построению функция  $g(\varepsilon_t)$  – случайная последовательность с нулевым средним. Компоненты  $\theta \varepsilon_{t-1}$  и  $\gamma (|\varepsilon_{t-1}| - E[|\varepsilon_{t-1}|])$  также имеют нулевое среднее. На множестве  $0 < \varepsilon_t < \infty$  функция  $g(\varepsilon_t)$  линейна по  $\varepsilon_t$  с углом наклона  $\theta + \gamma$ ,

а на множестве  $-\infty < \varepsilon_t < 0$  линейна с углом наклона  $\theta - \gamma$ . Таким образом,  $g(\varepsilon_t)$  позволяет процессу для условной дисперсии  $\sigma_t^2$  асимметрично реагировать на увеличение и падение цены активов.

Оценивая параметры с помощью надстройки «Поиск решения» в MS Excel, были получены следующие значения для исследуемого временного ряда  $\theta = 0,99$  и  $\gamma = 5,73 \times 10^{-6}$ . Подставив полученные значения в функцию  $g(\varepsilon_t)$ , определим ее значения. Перепишем формулу (9) в виде:

$$\ln(\sigma_t^2) = K + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(\varepsilon_{t-1}) + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-1}^2). \quad (10)$$

Для процесса  $EGARCH(1.1)$ , как и ранее для  $GARCH(1.1)$  идентифицированы коэффициенты  $K$ ,  $\alpha_1$  и  $\beta$  (см. табл. 1).

Таблица 1

Параметры идентификации модели  $EGARCH(1.1)$ 

$K$	$\alpha_1$	$\beta$
0,01	1	-0,06

Подставив эти коэффициенты в формулу (11), получим значения логарифмов волатильности временного ряда. График прогноза логарифмов волатильности на несколько дней вперед представлен на рисунке 5.

На графике (рис. 5) видно, что волатильность растет с положительным знаком. В силу того что прогнозирование цены ОПИФ «Сбербанк – Телекоммуникации и технологии» осуществляется на период прошедшего времени, для которого характерна тенденция к росту, а явных скачков цен не наблюдается. Если бы мы наблюдали явные изменения цен пая, то прогноз логарифма волатильности имел бы пилообразный вид. Так, например, пилообразный вид волатильности можно наблюдать в фондах, базирующихся на торговле энергоресурсами, что в условиях мировой экономической конъюнктуры вокруг избытка предложения углеводородов оказывает значительное влияние на формирование кластеризации волатильности цен. Это отличие и объясняется особенностью модели  $EGARCH$ , которое описано выше.

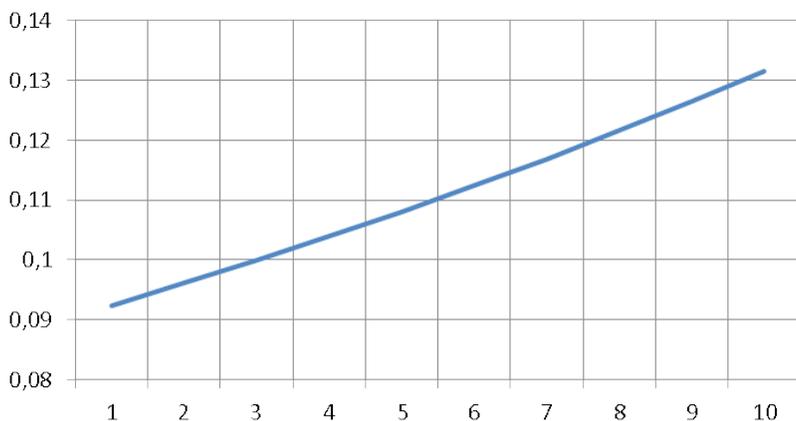


Рис. 5. Прогноз логарифмов волатильности на несколько дней при использовании процесса *EGARCH* (1.1)

Зная логарифмы волатильности, мы можем перейти от них к значениям цены пая, преобразовав некоторые формулы. С помощью этих преобразований получились прогнозные значения цен пая на 10 дней, которые представлены в табл. 2.

Таблица 2

Прогнозные значения на 10 дней (в руб.)

Дата	Прогноз
25.02.2016	3531.81
26.02.2016	3541.45
27.02.2016	3565.73
28.02.2016	3605.54
29.02.2016	3662.02
01.03.2016	3736.62
02.03.2016	3831.10
03.03.2016	3947.64
04.03.2016	4088.93
05.03.2016	4258.22

Для сравнения на рис. 7 представлены графики прогнозных значений и реальных данных на это время.

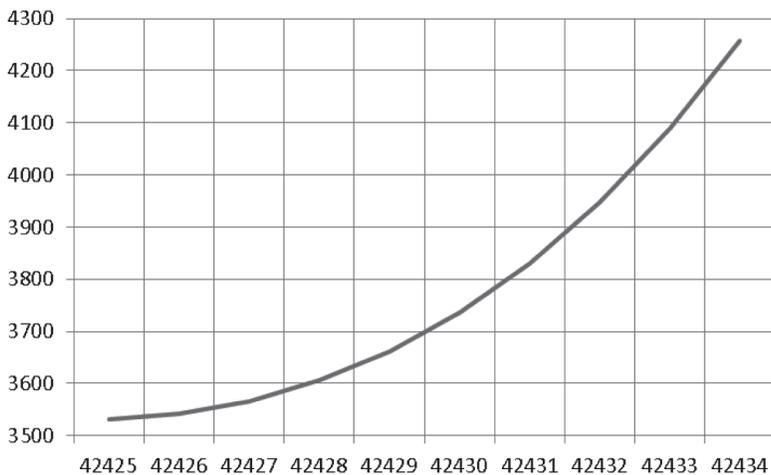


Рис. 6. График прогнозных значений цены пая ОПИФ «Сбербанк – Телекоммуникации и Технологии»

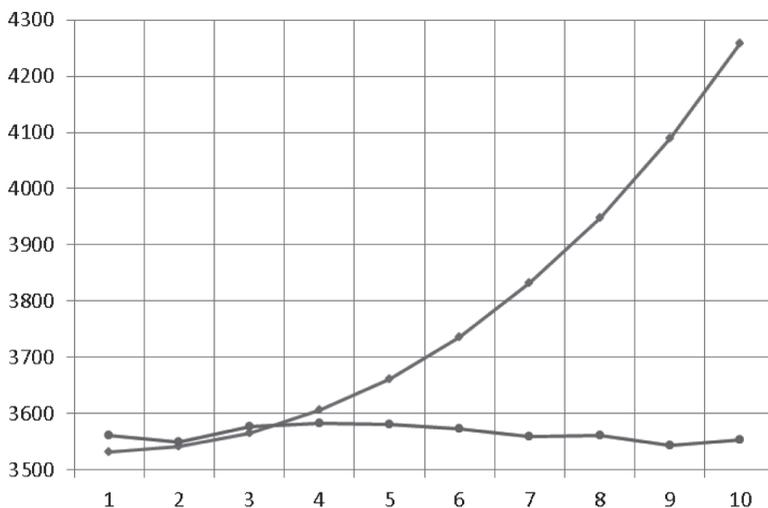


Рис. 7. График прогнозных и реальных значений цены пая ОПИФ «Сбербанк – Природные ресурсы» (растущая кривая – прогнозные значения; кривая, пролегающая под прогнозом – реальные наблюдения цены пая)

Как видно на рисунке, прогнозные значения близки к реальным данным, особенно в первые дни. Это говорит о том, что с помощью модели EGARCH можно получить прогноз с достаточно высокой точностью. Но следует отметить, что финансовые временные ряды рекомендуется прогнозировать на короткие сроки. Данное обстоятельство связано со скорой сменой значений влияющих факторов на формирование цены пая. Указанную рекомендацию можно пронаблюдать на рис. 6, где отчетливо видно, как прогноз с 5 дня в значительной степени отклоняется от реального положения на фондовом рынке.

Одной из методик анализа событий, происходящих на рынке, которая выделяется своей простотой и оригинальностью, является фрактальный анализ. Фактически не существует точного определения понятия «фрактал». Фракталы характеризуются свойством самоподобия и фрактальной размерностью, которую необходимо знать для построения прогноза. Численное значение фрактальной размерности определяется с помощью R/S анализа, предложенного Херстом. Подробное описание этапов данного анализа изложено в книге Петерса<sup>5</sup>.

Показатель Херста дал результат  $H = 0,6129 \pm 0,148$ . Оценка показателя Херста имеет большую погрешность, это можно объяснить сильной зашумленностью ряда цен, поэтому нельзя утверждать, что ряд имеет фрактальное распределение. Но тем не менее Петерс склоняется к тому, что ряд персистентен, так как среднее значение  $H$  все-таки больше 0,5.

Для определения фрактальной размерности необходимо воспользоваться формулой

$$D = 2 - H. \quad (12)$$

В результате получим размерность  $D = 1,3871$ . Узнав размерность, можно осуществить прогноз, используя локальную аппроксимацию.

В соответствии с теорией Такенса–Мане приемлемое описание фазового пространства можно получить, если взять вместо реальных переменных  $p$ -мерные векторы задержек из значений ряда в последовательные моменты времени. При выполнении условия  $p \geq 2D + 1$ <sup>6</sup>.

Построим матрицу задержек:

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \rightarrow X_{p(N-p+1)} = \begin{pmatrix} x_p & x_{p+1} & \dots & x_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{N-p+2} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{N-p+1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Затем определяем вид локального представления, наиболее распространенный вариант – локальная аппроксимация первого порядка (далее  $LA(1)$ ) (14).

$$x_{t+1} = a_0 + x_t^T a, \quad (14)$$

где  $a$  – матрица параметров представления.

Кроме этого, используются еще 2 варианта: линейная аппроксимация нулевого порядка ( $LA(0)$ ) (15) и второго порядка ( $LA(2)$ ) (16).

$$x_{t+1} = a_0, \quad (15)$$

$$x_{t+1} = a_0 + x_t^T a + x_t^T B x_t, \quad (16)$$

где  $B$  – матрица дополнительных параметров.

Примером использования линейной аппроксимации нулевого порядка служит прогноз температуры воздуха. Один из способов прогноза температуры на следующий день состоит в том, чтобы, найдя, в какой из предшествующих дней температура была максимально близкой к сегодняшней, взять в качестве прогноза температуры на завтра ее величину в следующий за найденным день<sup>7</sup>.

Используя аппроксимацию первого порядка (14), параметр  $a_0$  найдем по примеру, описанному выше, а матрицу параметров  $a$  – по следующим преобразованиям.

$$x_t^T a = x_{t+1} - a_0 E, \quad (17)$$

$$(x_t^T)^{-1} x_t^T a = (x_t^T)^{-1} (x_{t+1} - a_0 E), \quad (18)$$

$$a = (x_t^T)^{-1} (x_{t+1} - a_0 E). \quad (19)$$

При использовании аппроксимации второго порядка (16) известную матрицу  $B$  можно найти по следующим преобразованиям.

$$x_{t+1} = a_0 + x_t^T a + x_t^T B x_t, \quad (20)$$

$$(x_t^T)^{-1} x_t^T B x_t (x_t)^{-1} = (x_t^T)^{-1} x_{t+1} - a_0 E - x_t^T a (x_t)^{-1}, \quad (21)$$

$$B = (x_t^T)^{-1} (x_{t+1} - a_0 E - x_t^T a (x_t)^{-1}). \quad (22)$$

На рис. 8 представлены графики прогноза при использовании локальной аппроксимации нулевого и первого порядка, а также график реальных данных за этот период.

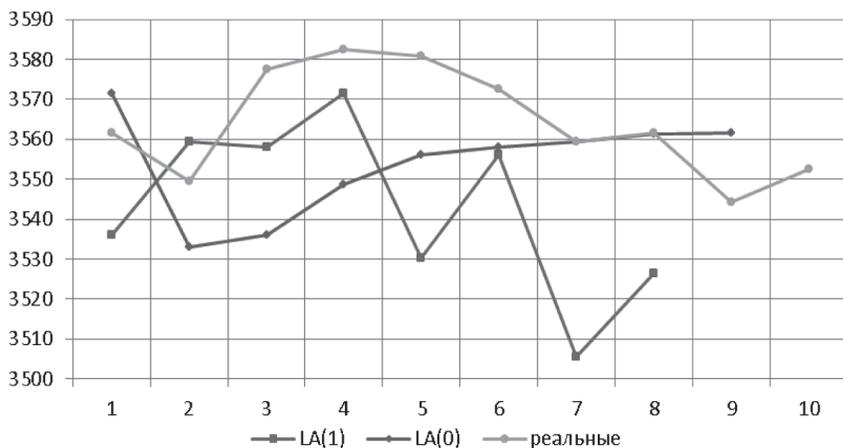


Рис. 8. Прогноз ОПИФ «Сбербанк – Телекоммуникации и Технологии» на период с 25.02 по 05.03.2016 г.

В табл. 3 отражены прогнозные значения по аппроксимации первого и нулевого порядка.

Таблица 3  
Прогнозные значения ОПИФ  
«Сбербанк – Телекоммуникации и Технологии» (в руб.)

Дата	$LA(1)$	$LA(0)$	Исторические наблюдения
25.02.2016	3536.1	3571.6	3561.6
26.02.2016	3559.3	3532.9	3549.6
27.02.2016	3558.0	3536.1	3577.5
28.02.2016	3571.6	3548.8	3582.6
29.02.2016	3530.3	3556.0	3580.9
01.03.2016	3556.0	3558.0	3572.5
02.03.2016	3505.6	3559.3	3559.5
03.03.2016	3526.4	3561.4	3561.5

Прогнозные значения по аппроксимации нулевого порядка отличаются от реальных данных в среднем на 17,66 руб., а аппроксимации первого порядка на 27,7 руб.

Средняя ошибка аппроксимации по первому прогнозу (аппроксимация первого порядка) составляет 0,78%, а по второму прогнозу (аппроксимация нулевого порядка) – 0,5%, что говорит о неплохих результатах. Также графики прогнозов имеют схожую тенденцию с графиком реальных данных за это время.

Для сравнения результатов на рис. 9 представлены графики прогнозов EGARCH, LA (0), LA (1).

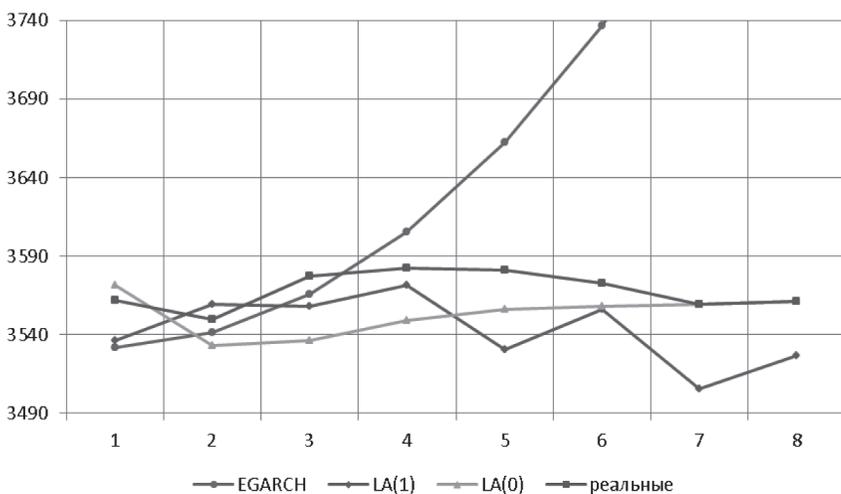


Рис. 9. Прогнозы EGARCH (1,1), LA (0), LA (1)

По графику видно, что в первые дни все варианты прогноза достаточно близко расположены к реальным данным. Но модель EGARCH дает адекватный прогноз лишь на небольшое количество дней. Локальные аппроксимации первого и нулевого порядка тоже с ростом количества дней отклоняются сильнее от реальных данных, но примерно повторяют их тенденцию.

- 
- <sup>1</sup> Сайт «Сбербанк – Управление активами». [Электронный ресурс] URL: <http://www.sberbank-am.ru> (дата обращения: 01.09.2016)
  - <sup>2</sup> *Молоденок К.В.* ARCH- и GARCH-модели временных рядов: дипломная работа. ... 230401.65 / Науч. рук. З.И. Баженова. М., 2014. [Электронный ресурс] URL: <https://miem.hse.ru/data/2014/06/09/1324317113/Диплом.pdf>
  - <sup>3</sup> *Росси Э.* Одномерные GARCH-модели: Обзор // Квантиль. 2010. № 8. С. 167.
  - <sup>4</sup> Там же.
  - <sup>5</sup> *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004.
  - <sup>6</sup> *Лоскутов А.Ю.* Анализ временных рядов: Курс лекций. М.: МГУ, 2010.
  - <sup>7</sup> Там же.