А.Г. Галканов, А.А. Бастрон

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЙ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗАКОНОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Представлены исследования некоторых аспектов определения математических понятий и упрощенного доказательства математических теорем с применением метода от противоположного и законов математической логики, причем без ущерба для математической строгости. Показаны новое определение числового уравнения и числового тождества, новые доказательства теорем Больцано-Коши и Вееpштрасса.

Ключевые слова: определение, математическое понятие, доказательство, математическая теорема, математическая строгость, математическая логика, законы логики.

1. О математических понятиях и их определениях

Каждое математическое понятие является неопределяемым или определяемым. Для каждого определяемого понятия C существует другое понятие, а именно его отрицание $\neg C$, назовем его противоположным к C. Очевидно, что если $\neg C$ противоположно к C, то C противоположно к $\neg C$. В качестве примера приведем определения числового уравнения и числового тождества, причем в одном определении[1]. Рассмотрим одноместный предикат

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \in X \neq \varnothing \end{cases} \quad (1),$$

где f, $g \in C(X)$. Одноместный предикат (1) есть:

$$\forall x \in X\left[P(x) = tru\right] \Leftrightarrow \forall x \in X\left[f(x) = g(x)\right] \qquad (2);$$

- тождественно ложный предикат, если

$$\forall x \in X\left[P(x) = fal\right] \Leftrightarrow \forall x \in X\left[f(x) \neq g(x)\right] \qquad (3);$$

- выполнимый предикат, если

$$\exists a \in X\left[P(a) = tru\right] \Leftrightarrow \exists a \in X\left[f(a) = g(a)\right] \qquad (4);$$

- опровержимый предикат, если

$$\exists b \in X\left[P(b) = fal\right] \Leftrightarrow \exists b \in X\left[f(b) \neq g(b)\right] \qquad (5).$$

Из всех форм (2) – (5) лишь (2) наилучшим образом подходит под определение тождества. Попытаемся выяснить, какой предикат из оставшихся (2) – (4) наиболее адекватно моделирует понятие уравнения. Тождественно ложный предикат (3) не может быть назван уравнением хотя бы потому, что в этом случае, например, понятие решения уравнения теряет смысл. Выполнимый предикат (4) также не подходит, по меньшей мере, по двум причинам. Во-первых, он потенциально содержит предикат (2), так что в этом случае понятия «тождество» и «уравнения» не могут быть независимыми. Во-вторых, из понятия «уравнения» сразу же выпадут те, у которых не существует решения. Так что остается последний, пятый, предикат. А он как раз наилучшим образом подходит, так как, во-первых, потенциально содержит (3) и (4); во-вторых, независим от понятия тождества как его отрицание, и, в-третьих, понятия «тождество» и «уравнение» можно дать в одном определении.

Определение 1[2]. Если $\exists \alpha \in X\left[f(\alpha) \neq g(\alpha)\right]$, то предикат (1) называется числовым уравнением, иначе: $\forall x \in X\left[f(x) = g(x)\right]$ – числовым тождеством на множестве X.

При этом X называется множеством задания уравнения (*МЗУ*), если (1) есть уравнение, или тождества (*МЗТ*), если (1) есть тождество.

Если в определении 1 понятие C – числовое уравнение, то его отрицание $\neg C$ – числовое тождество, которое есть противоположное ему понятие.

Так, согласно определению 1, предикат

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}$$

является уравнением на множестве $X=[1;+\infty)$, но тот же предикат на множестве $[5;10]$ есть тождество, ибо

$$\forall x \in [1;+\infty)\setminus[5;10]\left[\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \neq 1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\right],$$

$$\forall x \in [5;10]\left[\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1-\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}\right].$$

Примечание 1. Если до сих пор равенство вида $f(x)=g(x)$ считалось тождеством либо уравнением, то теперь оно может оказаться ни уравнением, ни тождеством, если $X=\varnothing$. Поэтому условие $X\neq\varnothing$ следует учитывать при составлении уравнений. Так, предикат $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}, x\in X\subset\mathbb{R}$ не является ни уравнением, ни тождеством на множестве $\mathbb{R}$, поскольку $X=\varnothing$.

2. О математических теоремах и их доказательствах

Связь между математическими понятиями, среди которых есть хотя бы одно определяемое, выражается в форме теоремы[3]. Для каждой теоремы T существует другая теорема, а именно противоположная обратной, назовем ее теоремой, двойственной к T, и обозначим символом T^d. Существуют два вида теорем: стандартная и нестандартная.

Определение 2. Если в формулировке теоремы ее заключения отделены от ее условий, то такая теорема называется стандартной, иначе – нестандартной.

Деление множества всех математических теорем на два класса впервые дано в работе А.Г. Галканова[4]. Отметим, что многие теоремы можно сформулировать как в стандартной, так и в нестандартной форме. Стандартные теоремы моделируются импликацией или эквиваленцией[5]. Существуют два вида стандартных теорем: $T_1 \doteq A \Rightarrow B$ и $T_2 \doteq A \Leftrightarrow B$, где запись $T \doteq A \Rightarrow B$ означает: $A \Rightarrow B$ есть теорема T.

Определение 3. Теорема $T_1^d \doteq \neg B \Rightarrow \neg A$ называется двойственной теореме $T_1 \doteq A \Rightarrow B$.

Определение 4. Теорема $T_2^d \doteq \neg A \Leftrightarrow \neg B$ называется двойственной теореме $T_2 \doteq A \Leftrightarrow B$.

Отметим два свойства двойственных теорем.

1) $T_1^d \sim T_1$, $T_2^d \sim T_2$; 2) $\left(T_1^d\right)^d \sim T_1$, $\left(T_2^d\right)^d \sim T_2$.

Двойственные теоремы представляют интерес тем, что из логической равносильности теоремы $T_1^d \sim T_1$ или теоремы $T_2^d \sim T_2$ равносильность их доказательств, вообще говоря, не вытекает. Поэтому двойственные теоремы могут быть доказаны проще исходных теорем. В качестве примера рассмотрим теорему Больцано-Коши. Во многих книгах по математическому анализу[6] теорема Больцано-Коши формулируется так:

$$f \in C[a;b] \wedge f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a;b)[f(c) = 0] \qquad (6).$$

А в работе В.А. Зорича[7] она имеет следующую формулировку:

$$f \in C[a;b] \wedge f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in [a;b][f(c) = 0] \qquad (7).$$

Тут же возникает вопрос: верно ли, что в (7) точка c принадлежит отрезку $a;b$? Запишем утверждение, двойственное (7):

$$f \in C[a;b] \wedge \forall x \in [a;b][f(x) \neq 0] \Rightarrow f(a)f(b) \geq 0 \qquad (7').$$

В (7´) единственно верным заключением является $f(a)f(b) > 0$, так как $f(a)f(b) = 0$ несовместимо с условиями. Так что вместо (7´) должно быть

$$f \in C[a;b] \wedge \forall x \in [a;b][f(x) \neq 0] \Rightarrow f(a)f(b) > 0 \qquad (7'').$$

Следовательно, вместо (7) имеет место

$$f \in C[a;b] \wedge f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in [a;b][f(c) = 0] \qquad (8),$$

что является наиболее полной формулировкой данной теоремы. Отметим, что (6) не противоречит (8), а в (7) $c = a \dot{\vee} c = b$ противоречит $f(a)f(b) < 0$. Теорема, двойственная (8), имеет следующую формулировку:

$$f \in C[a;b] \wedge \forall x \in [a;b][f(x) \neq 0] \Rightarrow f(a)f(b) > 0 \qquad (8').$$

Итак, с применением двойственных теорем устранена неточность в формулировке (7) теоремы Больцано-Коши. Более того, (8) можно назвать обобщенной теоремой. Что же касается доказательства (8), вместо нее достаточно доказать (8´), что совсем элементарно.

◀ В самом деле, при сохранении первого условия $f \in C[a;b]$ имеем

$$\forall x \in [a;b][f(x) \neq 0] \Rightarrow \forall x \in [a;b][f(x) < 0 \dot{\vee} f(x) > 0] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(a)f(b) > 0. ▶$$

3. О методе от противоположного и его применения к доказательству теорем

Существуют три метода доказательства математических теорем: прямой метод, метод математической индукции и МОП – метод от противоположного. Последний традиционно называется методом от противного. Однако в монографии А.Г. Галканова[8] он назван методом от противоположного и там же этому дано обоснование. Отправная точка МОП: «не верно, что ...», а точка прибытия:

«противоречие». Без определенной подготовки вряд ли можно назвать такой метод естественным для нашего мышления. Традиционно под МОП понимается такой метод доказательства теоремы, который начинается с отрицания заключения теоремы и заканчивается противоречием. В указанной же работе понятие МОП определено несколько иначе.

Определение 5. Методом от противоположного называется конечный алгоритм, такой что:

1) на его первом шаге отрицается заключение теоремы или сама теорема;

2) на его последнем шаге получается заключение, противоречащее условию доказываемой теоремы, или ранее определенному понятию, или принятой аксиоме, или доказанной теореме.

Многие математические теоремы доказываются МОП, а некоторые – только МОП. Несмотря на то что МОП является одним из важных методов доказательства теорем, в учебной и научной литературе он представлен далеко не полным образом. Да и у преподавателей школ и вузов нет достаточного времени уделять ему должное внимание на занятиях по математике. Отсюда – весьма приблизительное представление о нем у учащихся школ, студентов вузов, а порой и у преподавателей математики.

В качестве нетривиального применения МОП приведем новые доказательства двух теорем Вейерштрасса[9]. Пусть $f : X \to Y$ – некоторая функция, где $X = [a;b]$.

Теорема 1. Если f – неограниченная функция на отрезке X, то она на этом отрезке разрывная: $f \notin \Omega(X) \Rightarrow f \notin C(X)$.

◀ МОП. Допустим, что доказываемое утверждение ложно. Тогда его отрицание должно быть истинным: $f \notin \Omega(X) \Rightarrow f \in C(X) = tru$. Запись $f \notin \Omega(X)$ означает: f – неограниченная функция хотя бы в одной точке отрезка X, а $f \in C(X)$ означает: f – локально ограниченная функция в каждой точке отрезка X. Так что наше допущение оказалось не совместимым с законом исключенного третьего. ▶

Следствие 1 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке X, то она на этом отрезке ограничена: $f \in C(X) \Rightarrow f \in \Omega(X)$.

◀ К теореме 1 применить закон контрапозиции. ▶

Пусть f – непостоянная функция на отрезке X.

Теорема 2. Если функция f непрерывна на отрезке X, то множество ее значений есть отрезок:

$$f \in C(X) \Rightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}\left(A < B\right)\forall x \in X\left[f(x) \in \left[A; B\right]\right].$$

◀ МОП. Предположим, что доказываемое утверждение ложно. Тогда его отрицание истинно: $\forall A, B \in \mathbb{R}\left(A < B\right)\exists c \in X\left[f(c) < A \dot{\vee} f(c) > B\right] \doteq tru$, т. е. функция f на отрезке X не ограничена и по теореме 1 $f \notin C(X)$, что противоречит условию. ▶

Следствие 2 (вторая теорема Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке X, то на этом отрезке она принимает свои наименьшее и наибольшее значения.

Обозначения

◀,▶ – начало и конец доказательства теоремы или следствия;

$\mathbb{R}$ – множество действительных чисел;

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ – отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, строгая дизъюнкция, импликация и эквиваленция соответственно;

$\forall$, $\exists$ – кванторы общности и существования соответственно;

$A \sim B$ – равносильность математических высказываний A и B;

$U \dot{\vee} \neg U$ – закон исключенного третьего;

$\left(U \Rightarrow V\right) \sim \left(\neg V \Rightarrow \neg U\right)$ – закон контрапозиции;

$\left(U \Leftrightarrow V\right) \sim \left(\neg V \Leftrightarrow \neg U\right)$ – закон противоположности;

$\neg\left(U \Rightarrow V\right) \sim \left(U \wedge \Leftrightarrow \neg V\right)$ – отрицание импликации;

МОП – метод от противоположного (традиционно от противного);

$\Omega[a; b]$ – множество всех функций, ограниченных на отрезке $[a; b]$;

$C[a; b]$ – множество всех функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$;

$U \doteq A$ – U есть высказывание A;

tru (truth), fal (false) – истина, ложь соответственно;

$\exists c \in (a;b)[f(c)=0]$ – некоторая точка $c \in (a;b)$ есть нуль функции f;

$\forall x \in (a;b)[f(x) \neq 0]$ – в интервале $(a;b)$ не существует нуль функции f.

Примечания

[1] *Галканов А.Г.* Числовые уравнения и тождества в понятиях, теоремах, методах, задачах и решениях. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та леса, 2013.

[2] Там же.

[3] *Галканов А.Г.* О новых доказательствах некоторых теорем в курсе математического анализа // Вестн. Моск. гос. гуманитар.-экон. ин-та. 2014. № 4. С. 129–137.

[4] *Галканов А.Г.* Метод от противоположного и его применения в математике. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та леса, 2011.

[5] Там же.

[6] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб. пособие для ун-тов и пединтов: В 3 т. Т. 1. М.: Наука, 1969; *Берс Л.* Математический анализ: Учеб. пособие для втузов: В 2 т. Т. 1 / Пер. с англ. Л.И. Головиной. М.: Высш. шк., 1975; *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа: Учеб. для ун-тов и втузов: В 2 т. Т. 1. М.: Высш. шк., 1981; *Никольский С.М.* Курс математического анализа: Учеб. для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001; *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2004.

[7] *Зорич В.А.* Математический анализ: Учеб.: В 2 ч. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2002.

[8] *Галканов А.Г.* Метод от противоположного и его применения в математике.

[9] *Галканов А.Г.* О новых доказательствах некоторых теорем...